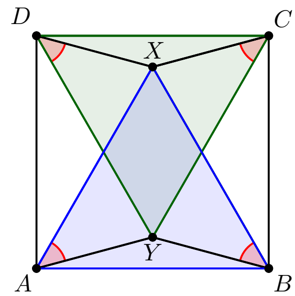
1. ročník tímovej súťaže DuoGeo – kategória ZŠ

9. 2. 2025



Úloha 1. Do štvorca $ABCD$ boli nakreslené rovnostranné trojuholníky ABX a CDY. Určte súčet vyznačených uhlov.

(Mária Dománуová)

Riešenie. V prvom rade si uvedomíme, že vďaka symetrii sú všetky štyri vyznačené uhly rovnaké. Zameriame sa na nájdenie veľkosti $|\angle YDX|$.

Všimnime si, že vieme vypočítať $|\angle XAD|$ ako $|\angle BAD| - |\angle BAX|$, čo je $90° - 60° = 30°$. Podobne vieme odvodiť $|\angle ADY| = 30°$.

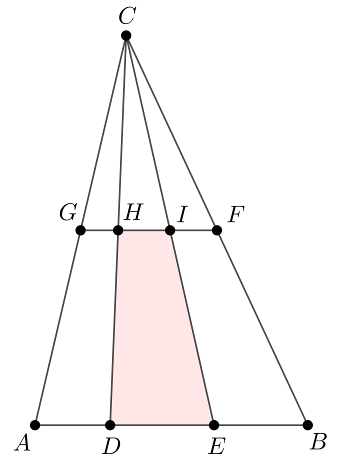
Ďalej platí $|DA| = |AB| = |AX|$, takže trojuholník AXD je rovnoramenný. Keďže $|\angle XAD| = 30°$, tak z toho ľahko dopočítame $|\angle ADX| = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$. Máme však $|\angle ADY| = 30°$, z čoho hneď dostávame, že hľadaný uhol $\angle YDX$ má veľkosť $|\angle ADX| - |\angle ADY| = 75° - 30° = 45°$.

Zadanie sa na nás pýta na súčet štyroch uhlov veľkosti $45°$, odpoveď je teda $4 \cdot 45° = 180°$.

Poznámky k bodování. Většina řešení správně určila velikosti některých úhlů v obrázku, ale často v nich chyběl nějaký poznatek, který by řešení úlohy dotáhl do konce. Většina řešení dokázala využít velikosti vnitřních úhlů ve čtverci a rovnostranném trojúhelníku (podle množství správných poznatků za **2 až 4 body**), ale dál už si nevšimla rovnoramenného trojúhelníku v obrázku. Nejvíce bodů jsme tak strhávali za řešení, která výsledek nějakým způsobem tipnula nebo nedostatečně zdůvodnila, jak k němu dospěla.

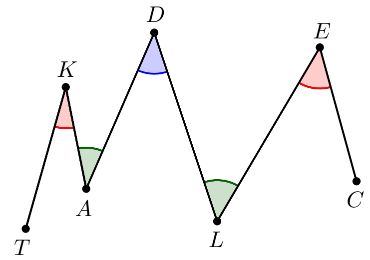
Úloha 2. Je daný trojuholník ABC. Stredy jeho strán BC a AC označme postupne ako F a G. Na strane AB sú dané body D a E tak, že D leží medzi A a E. Úsečky CD a CE pretínajú úsečku FG postupne v bodoch H a I. Štvoruholník $DEIH$ má obsah 90 cm^2 a dĺžky úsečiek HI a AB sú postupne 4 cm a 21 cm. Vypočítajte obsah trojuholníka ABC. *(Karel Pazourek)*

Riešenie. Všimnime si trojuholník CDE. Úsečka HI je jeho stredná priečka. Obsah trojuholníka CHI je teda štvrtina obsahu trojuholníka CDE. Preto platí, že obsah štvoruholníka $DEIH$ je rovný trojnásobho obsahu CHI, takže obsah CHI je rovný $90/30 = 30$. Keďže $|HI| = 4$, je výška na stranu HI v tomto trojuholníku rovná $2 \cdot 30/4 = 15$. Výška v trojuholníku CDE je jej dvojnásobkom, takže je rovná 30. Obsah trojuholníka ABC potom musí byť $21 \cdot 30/2 = 315$.

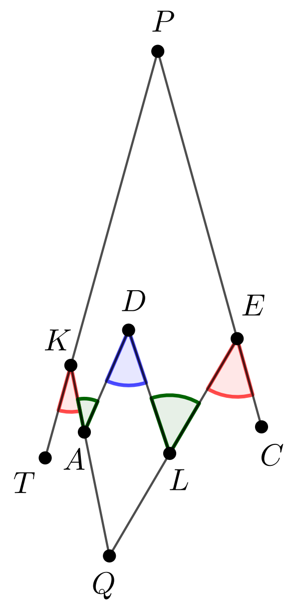


Poznámky k bodování. Nejčastější problém byl, že řešení neobsahovalo popis, jak se k číslům dojde. Za pozorování, že střední příčka je dvakrát menší, a z toho dopočtení úseček, jsme dávali 2 **body**. Body jsme naopak strhávali za chybějící zdůvodnění, jak se k délkám či obsahům došlo. Za numerické chyby jsme body nestrhávali.

Úloha 3. Sú dané body T, K, A, D, L, E, C ako na obrázku. Predpokladajme, že súčet červených uhlov je 73°, modrý uhol je 42°, a súčet zelených uhlov je 84°. Určte uhol, ktorý zvierajú priamky TK a EC. *(Svetlana Bednářová)*



Riešenie. Aby sme mohli určiť uhol, ktorý zvierajú priamky TK a EC, predĺžime si úsečky TK a EC na priamky a ich priesečník označíme P. Potom vlastne hľadáme $|\angle TPC|$.



Tento krok by nás mohol motivovať k tomu, aby sme skúsili predĺžiť na priamky aj iné úsečky – všimneme si, že ak predĺžime AK a LE a priesečník týchto priamok označíme Q, bude novovzniknutý útvar $KQEP$ štvoruholník a potrebujeme určiť veľkosť jeho vnútorneho uhla pri vrchole P. Pretože sú uhly $\angle PKT$ a $\angle PEC$ oba priame, je ich súčet rovný 360°, čo je tiež súčet vnútorných uhlov štvoruholníka $KQEP$. Porovnaním týchto dvoch vyjadrení dostaneme

$$|\angle TPC| + |\angle KQE| = |\angle TKQ| + |\angle QEC| = 73°.$$

Teraz vyjadríme uhol $\angle KQE$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade využijeme, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v štvoruholníku $AQLD$ je 360°, rovnako ako súčet priamych uhlov $\angle KAQ$ a $\angle QLE$. Preto

$$84° = |\angle KAD| + |\angle DLE| = |\angle AQL| + |\angle ADL| = |\angle KQE| + 42°,$$

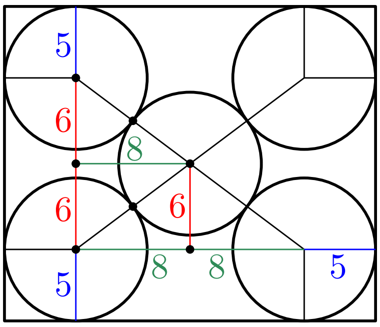
odkiaľ $|\angle KQE| = 42°$. Dosadením do prvej uvedenej rovnosti už ľahko získame

$$|\angle TPC| = 73° - |\angle KQE| = 73° - 42° = 31°.$$

Poznámky k bodování. V této úloze bylo zásadním krokem, prodloužit si zmíněné úsečky na přímky a pracovat s bodem, kde se protnou. Řešení, která za tuto úlohu získala **0 bodů**, tento krok neobsahovala. Některá řešení podmínku o součtu úhlů pochopila tak, že si velikosti daných úhlů mohou zvolit, což samozřejmě není pravda (dokud dávají správný součet, může se stát, že úhly budou všelijaké). Tato řešení mohla získat až 2 **body**. Dále až 4 **body** získala řešení, která ulohu nedořešila, ale používala správné kroky jako otáčení přímek podle zadaných uhlů, nebo dopočítávání úhlů v n-úhelnících.

Úloha 4. Máme obdĺžnikový papier so stranami dĺžok 22 cm a 26 cm. Rozhodnite a zdôvodnite, či je možné z neho vyrezať 5 kruhov s priemermi 10 cm. *(Josef Tkadlec)*

Riešenie. Odpoveď je, že to ide spraviť. Pomôžeme si trojuholníkom so stranami 6, 8, 10, ktorý je z Pytagorovej vety kvôli $6^2 + 8^2 = 10^2$ pravouhlý. Strana dĺžky 26 je potom rozdelená ako $5 + 2 \cdot 8 + 5$, zatiaľ čo strana dĺžky 22 ako $5 + 2 \cdot 6 + 5$. Konštrukcia je viditeľná z obrázka. Aby bolo rezanie možné, potrebujeme, aby sa kruhy neprekrývali. To je ale zabezpečné tým, že súčet polomerov žiadnych dvoch kruhov neprevyšuje vzdialenosť ich stredov.



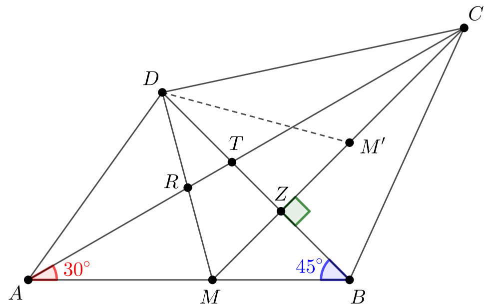
Poznámky k bodování. Dost řešení nepochopilo, že je třeba úlohu dokázat a nejen narýsovat (2 **body** za konstrukci). Někteří měli problém, že si mysleli, že stačí podělit obsah obdélníka obsahem kruhu a tím se získá, kolik kruhů se tam vejde (**0 bodů**). Další problém byl, že si mysleli, že stačí ukázat, že se "vejdou 3 na úhlopříčku", tedy, že úhlopříčka je delší než 30. Taková řešení dostala **3 body**: 2 body za konstrukci + bod za počítání Pythagorovkou.

Úloha 5. Je daný štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok T. Predpoladajme, že veľkosti uhlov BAC a DBA sú postupne 30° a 45°. Na úsečke BT leží bod Z taký, že $CZ \perp BT$. Predpokladajme, že priamka CZ pretne úsečku AB v bode M. Nech R je priesečník úsečiek AT a MD. Predpokladajme, že $|AM| = |AR|$ a $|MR| + |TD| = 14$ cm. Určte veľkosť úsečky $|BZ|$. *(Patrik Bak, Mária Dományová)*

Riešenie. V trojuholníku ATB poznáme uhly pri vrcholoch A a B, a síce 30° a 45°, uhol pri vrchole T teda bude mať veľkosť $180° - 30° - 45° = 105°$, takže $|\angle DTR| = 180° - 105° = 75°$.

Ďalej si všimnime, že v rovnoramennom trojuholníku AMR poznáme uhol oproti jeho základni, a síce 30°. Zvyšné uhly teda budú mať veľkosť $180° - \frac{1}{2} \cdot 30° = 75°$, takže tiež $|\angle DRT| = |\angle ARM| = 75°$.

Spojením dvoch predošlých odstavcov máme, že trojuholník DTR je rovnoramenný so základňou TR, takže $|DT| = |DR|$. Predpoklad $|MR| + |TD| = 14$ teda znamená, že $|MR| + |DR| = 14$, takže $|MD| = 14$.



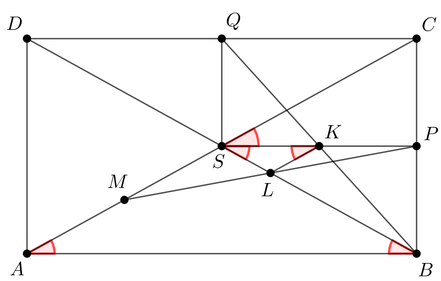
Pozrime sa na trojuholník MDZ. Je pravouhlý, pričom uhol pri vrchole D má veľkosť 30°. O takomto trojuholníku je všeobecne známe, že jeho prepona je dvojnásobkom odvesny oproti vrcholu s uhlom 30°, takže $|MZ| = 14/2 = 7$ (nahliadnuť to môžeme tak, že si uvedomíme, že ide o polovičku rovnostranného trojuholníka – viď obrázok, bod M' je taký bod, že Z je stred MM'; potom $|\angle MDM'| = 2 \cdot 30° = 60° = |\angle M'MD|$, takže trojuholník DMM' je naozaj rovnostranný, a teda $|MD| = |MM'| = 2|MZ|$).

Posledným krokom je uvedomiť si, že trojuholník MZB je tiež rovnoramenný: uhol pri vrchole Z je totiž 90° a uhol pri B je 45°, takže uhol pri M je tiež 45°.Tým pádom $|BZ| = |MZ| = 7$, takže úloha je vyriešená.

Poznámky k bodování. Väčšina riešiteľov sa správne rozhodla dopočítavať veľkosti uhlov (za všetky potrebné správne určené uhly sme udeľovali **2 body**). To bolo v úlohe kľúčové. Pomerne veľa riešiteľov správne využilo tieto poznatky na zistenie, že $|MD| = 14$ (**1 bod**) a $|MZ| = |BZ|$ (**1 bod**). Väčšina riešiteľov sa tu však zasekla a úlohu nedotiahli do konca. Za dokončenie s využitím $|MZ|/|MD| = 1/2$ vďaka uhlom v trojuholníku MZD sme dávali zvyšné **2 body**. Iba za uhádnutie výsledku sme udeľovali **1 bod**.

Úloha 6. Nech P, Q sú postupne stredy strán BC, CD obdĺžnika $ABCD$. Bod S je priesečník jeho uhlopriečok. Označme K priesečník priamok BQ a SP. Rovnobežka s AC prechádzajúca bodom K pretína priamku BD v bode L a priamka PL pretína uhlopriečku AC v bode M. Určte pomer $|SM| : |SL|$. *(Jaroslav Švrček)*

Riešenie. Všimnime si trojuholník BCD. Bod K je priesečníkom ťažnice BQ na stranu CD a jeho strednej priečky SP rovnobežnej s CD, tým pádom je K stredom SP (môžeme to vidieť napr. z toho, že SK je stredná priečka v BDQ, KP je stredná priečka v BQC, teda z rovností $|DQ| = 2|SK|$, $|CQ| = 2|KP|$ a $|DQ| = |CQ|$ máme $|SK| = |KP|$).



Teraz dokážeme, že $|LS| = |LK|$, k tomu si pomôžeme uhlami: Z rovnobežnosti $AB \parallel SK$ máme $|\angle LSK| = |\angle SBA|$. Z rovnoramennosti SBA je tento uhol rovný aj $|\angle BAS|$, čo je znova z rovnobežnosti $AB \parallel SK$ rovné $|\angle KSC|$. Nakoniec, vďaka rovnobežnosti $AC \parallel LK$ máme $|\angle KSC| = |\angle SKL|$, takže dokopy $|\angle LSK| = |\angle SKL|$, čo sme chceli dokázať.

Teraz si všimnime trojuholník PMS. Bod K je stredom SP. Týmto bodom vedieme rovnobežku s MS a pretneme s MP v L, úsečka KL je teda stredná priečka trojuholníka PMS.

Spojením s $|LS| = |LK|$ z predošlého odstavca teraz už ľahko dostávame $|SM| = 2|LK| = 2|SL|$, takže $|SM| : |SL| = 2 : 1$.

Poznámky k bodování. Hlavním problémem v této úloze bylo zmatení, jak jsou některé body definovány. V řešeních se často vyskytovala tvrzení stylu „protože M je střed AS, tak ...“, jenže zapomínala dokázat, proč je M střed AS. Ten v zadání je definován jako průsečík nějakých přímek. Za pouhé napsání výsledku jsme dávali **1 bod**. Za malé kroky k řešení jsme pak dali 2 **body**. Řešení, která naopak obsahovala různé nedostatky dostala **3-6 bodů**. I za malý počet drobných nedostatků jsme dali **6 bodů**.