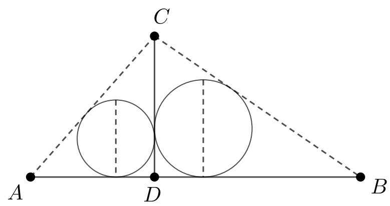
1. ročník tímovej súťaže DuoGeo – kategória SŠ

16. 2. 2025

Úloha 1. Je daný trojuholník ABC s výškou CD, pričom D leží na úsečke AB. Súčet dĺžok strán AC, BC a priemerov kružníc vpísaných trojuholníkom ADC a BDC (teda súčet čiarkovaných úsečiek) je 26 a dĺžka úsečky CD je 6. Určte obsah trojuholníka ABC. *(Mária Dományová, Patrik Bak)*



Úloha 2. Je daný päťuholník $ABCDE$ s práve jedným nekonvexným uhlom, a to pri vrchole C. Predpokladajme, že polpriamka AC pretína stranu DE, čím rozdelí päťuholník na 3 zhodné trojuholníky. Dokážte, že pomer dĺžok niektorých dvoch strán päťuholníka $ABCDE$ je $3:2$. *(Josef Tkadlec)*

Úloha 3. Na kružnici s označeným stredom je označených $n \geq 3$ rôznych bodov rozdeľujúcich kružnicu na oblúky $o_1, \ldots, o_n$ rôznych dĺžok kratších ako polkružnica. *Kružnicové operácie* umožňujú:

(i) označiť priesečníky dvoch kružníc,
(ii) zostrojiť kružnice so stredom v niektorom z označených bodov, pričom kružidlo môžeme do každého z bodov zapichnúť maximálne raz (kým je v ňom zapichnuté, môže spraviť viacero kružníc),
(iii) určiť polohu označeného bodu vzhľadom na niektorú z nakreslených kružníc (teda či leží na kružnici, vnútri nej alebo zvonka nej).

Dokážte, že pomocou týchto operácií vieme určiť, ktorý z oblúkov $o_1, \ldots, o_n$ je najdlhší. *(Ema Čudaiová)*

Úloha 4. Dve kružnice k a l so stredmi postupne v bodoch K a L sa pretínajú v bodoch A a B, pričom platí $KA \perp AL$. Kružnice k a l pretínajú úsečku KL postupne v bodoch P a Q. Priamky BQ a BP druhýkrát pretínajú kružnice k a l postupne v bodoch M a N. Dokážte, že priamky PM a QN sa pretínajú v strede kružnice vpísanej trojuholníka AKL. *(Patrik Bak)*

Úloha 5. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok T vpísaný do kružnice ω. Nech M je stredom oblúka AD kružnice ω obsahujúceho B a C. Predpokladajme, že na úsečkách BT a CT ležia postupne body $P \neq B$ a $Q \neq C$ také, že platí $|MP| = |MB|$ a $|MQ| = |MC|$. Nech O je stredom kružnice opísanej trojuholníka PQT. Dokážte, že platí $|\angle MOA| = |\angle MOD|$. *(Michal Pecho)*

Úloha 6. Je daný konvexný šesťuholník $ABCDEF$, v ktorom platí $|AB| = |EF|$, $|BC| = |FA|$, $|\angle BCD| = |\angle DEF|$ a $|\angle ABC| = |\angle CDE| = |\angle EFA|$. Dokážte, že kolmica na BF vedená bodom D prechádza ortocentrom trojuholníka ACE. *(Zdeněk Pezlar)*