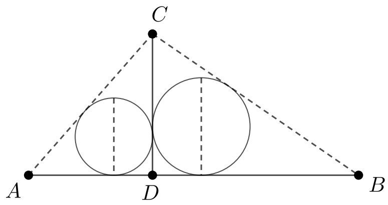
1. ročník tímovej súťaže DuoGeo – kategória SŠ

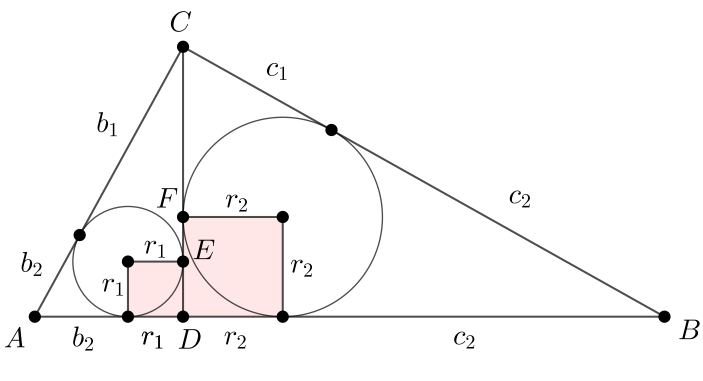
16. 2. 2025

Úloha 1. Je daný trojuholník ABC s výškou CD, pričom D leží na úsečke AB. Súčet dĺžok strán AC, BC a priemerov kružníc vpísaných trojuholníkom ADC a BDC (teda súčet čiarkovaných úsečiek) je 26 a dĺžka úsečky CD je 6. Určte obsah trojuholníka ABC. *(Mária Dományová, Patrik Bak)*



Riešenie. Označme si polomery jednotlivých kružníc ako r_1 a r_2, a tiež uvážme úsečky dĺžok b_1, b_2, c_1, c_2 ako na obrázku – rovnosť úsečiek veľkostí r_1 a r_2 vyplýva zo zvýraznených štvorcov, zatiaľ čo pri rovnosti úsečiek dĺžok b_2 a tiež úsečiek dĺžok c_2 sme použili známy fakt, že vzdialenosť vrcholu trojuholníka od bodu dotyku s kružnicou vpísanou je rovnaká pre obe ramená obsahujúce tento bod (zdôvodniť to vieme vďaka zhodnosti trojuholníkov tvorených daným vrcholom, stredom kružnice vpísanej a bodom dotyku).

Podľa zadania $|CD| = 6$. Všimnime si, že dĺžku $|CD|$ vieme vyjadriť dvoma ďalšími spôsobmi, jednak ako $|CE|+|ED|$, teda b_1+r_1 (znova používame rovnosť dotyčníc a zvýraznený štvorec), ale aj ako $|CF|+|FD| = c_1+r_2$. Tým pádom $b_1+r_1 = 6$ a $c_1+r_2 = 6$.



Druhá podmienka zo zadania hovorí, že $|CA|+|CB|+2r_1+2r_2 = 26$. Túto rovnosť rozpíšeme ako

$$26 = (b_1+b_2)+(c_1+c_2)+2r_1+2r_2 = (b_1+r_1)+(b_2+r_2)+(b_2+c_2+r_1+r_2) = 12+(b_2+c_2+r_1+r_2).$$

Všimnime si, že na pravej strane máme v zátvorke dĺžku $|AB|$ zapísanú ako súčet štyroch úsečiek, takže táto rovnosť vlastne znamená $|AB| = 14$. Tým pádom už vieme spočítať obsah ABC ako $14 \cdot 6/2 = 42$.

Iné riešenie. Podľa známeho vzorca pre veľkosť polomeru kružnice vpísanej trojuholníku pravouhlému trojuholníku platí

$$r_1 = \frac{|AD|+|CD|-|AC|}{2} \quad \text{a} \quad r_2 = \frac{|BD|+|CD|-|BC|}{2}.$$

V krátkosti zdôvodníme, prečo platí prvý vzťah (druhý je analogický). Po vynásobení dvomi a pripočítaní $|AC|$ máme ekvivalentný vzťah $2r_1 + |AC| = |AD| + |CD|$, a po prepise na naše úsečky máme, že ľavá strana je rovná $2r_1 + b_1 + b_2$, zatiaľ čo pravá strana $(b_2 + r_1) + (b_1 + r_1)$, čo je to isté.

S týmito vzťahmi možno výpočet $|AB|$ skrátiť: Sčítaním rovností a použitím $|AD|+|BD| = |AB|$ ľahko dostaneme vyjadrenie

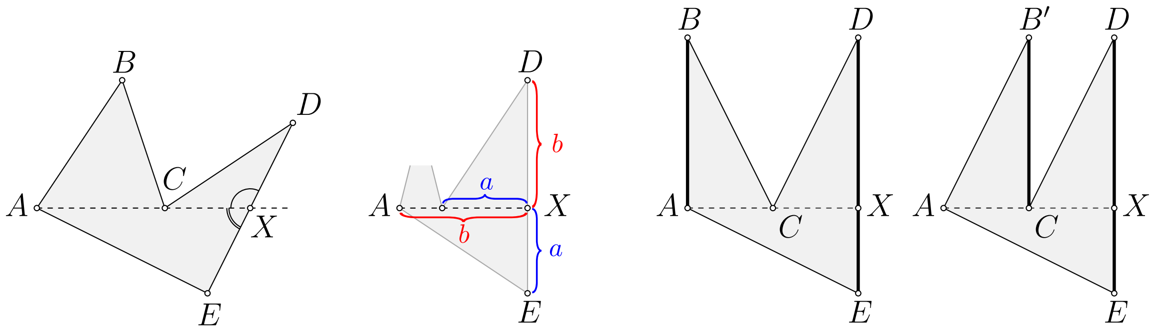
$$|AB| = 2r_1 + 2r_2 + |AC| + |BC| - 2|CD| = 26 - 2 \cdot 6 = 14$$

ako v predošlom riešení.

Poznámky k bodování. Klíčovou myšlenkou bylo uvědomit si, že dotyky kružnice vepsané rozdělují strany trojúhelníku na stejně dlouhé úseky. Částečné body jsme udělovali za různé poznatky, co k tomuto vedly.

Úloha 2. Je daný päťuholník $ABCDE$ s práve jedným nekonvexným uhlom, a to pri vrchole C. Predpokladajme, že polpriamka AC pretína stranu DE, čím rozdelí päťuholník na 3 zhodné trojuholníky. Dokážte, že pomer dĺžok niektorých dvoch strán päťuholníka $ABCDE$ je $3:2$. *(Josef Tkadlec)*

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že priamka AC je vodorovná, pričom bod A je vľavo a bod E je pod ňou (ako na ľavom obrázku). Z toho vyplýva, že bod D leží nad touto priamkou – pretože priamka AC musí pretínať stranu DE – a takisto bod B musí byť nad ňou, inak by polpriamka AC rozdelila päťuholník len na dve časti.



Nech X je prienik polpriamky AC so stranou DE. Potom sú trojuholníky ABC, CDX a XEA zhodné (aj keď poradie vrcholov nemusí byť rovnaké).

Ukážeme, že priamka AC je kolmá na stranu DE. Predpokladajme, že AC nie je kolmá na DE. Vtedy by pri bode X vznikli dva uhly $\angle DXA$ a $\angle AXE$, pričom jeden by bol tupý a druhý ostrý, nemohli by to teda byť zhodné uhly. Keďže ale majú súčet $180°$, tretí uhol v týchto zhodných trojuholníkov by musel mať veľkosť $0°$, čo nie je možné. Naozaj teda $AC \perp DE$.

Z toho vyplýva, že zhodné trojuholníky sú pravouhlé. Nech dĺžky odvesien v týchto trojuholníkoch sú $a \le b$ a dĺžka prepony je c (ako je znázornené na druhom obrázku). Pretože z usporiadania vyplýva, že $|XA| > |XC|$, máme $|XA| = b \quad \text{a} \quad |XC| = a$, teda strana AC má dĺžku $|AC| = b - a$. Keďže v pravouhlom trojuholníku pre stranu AC platí, že jej dĺžka musí byť rovná jednej z odvesien (buď a, alebo b), a keďže $b - a < b$, môžeme usúdiť, že $b - a = a$, teda $b = 2a$.

Týmto jednoznačne určíme tvar štvoruholníka $ACDE$. Trojuholník ABC môžeme umiestniť pozdĺž strany AC (ktorá má dĺžku a) dvoma rôznymi spôsobmi (ako je znázornené na pravom obrázku). V oboch prípadoch je strana trojuholníka ABC s dĺžkou b zároveň stranou päťuholníka $ABCDE$. Pretože strana DE päťuholníka má dĺžku $|DE| = |DX| + |XE| = b + a$, a keďže $a = \frac{b}{2}$, dostávame $|DE| = b + \frac{b}{2} = \frac{3}{2}b$. Tým pádom je pomer dĺžok príslušných strán päťuholníka $ABCDE$ rovný $3:2$, čo bolo potrebné dokázať.

Poznámky k bodování. Byli tři klíčové části důkazu, to že $|AC| = |CX|$, to že trojúhelník je pravoúhlý a poté z toho vyvodit, že správný poměr stran. Za každou část jsme udělovali částečné body.

Úloha 3. Na kružnici s označeným stredom je označených $n \geq 3$ rôznych bodov rozdeľujúcich kružnicu na oblúky $o_1, \ldots, o_n$ rôznych dĺžok kratších ako polkružnica. *Kružnicové operácie* umožňujú:

(i) označiť priesečníky dvoch kružníc,
(ii) zostrojiť kružnice so stredom v niektorom z označených bodov, pričom kružidlo môžeme do každého z bodov zapichnúť maximálne raz (kým je v ňom zapichnuté, môže spraviť viacero kružníc),
(iii) určiť polohu označeného bodu vzhľadom na niektorú z nakreslených kružníc (teda či leží na kružnici, vnútri nej alebo zvonka nej).

Dokážte, že pomocou týchto operácií vieme určiť, ktorý z oblúkov $o_1, \ldots, o_n$ je najdlhší.

(Ema Čudaiová)

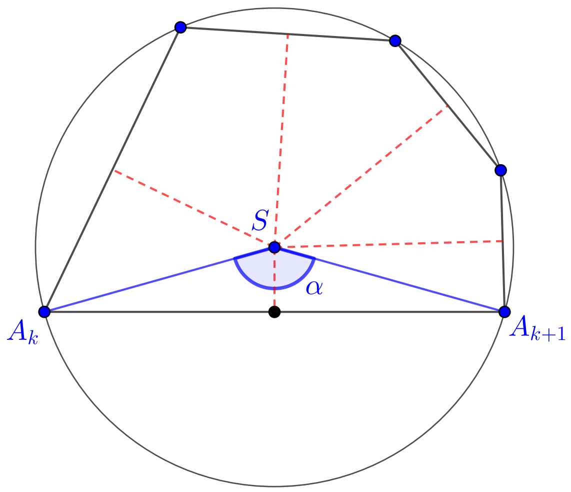
Riešenie. Body na kružnici označíme $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a jej stred S.

Predpokladajme, že najdlhší oblúk, ktorého krajnými bodmi sú 2 susedné body na kružnici, prislúcha tetive A_mA_{m+1} (v prípade $m = n$ uvažujeme A_mA_1). Potom zrejme pre každé k platí $|\angle A_kSA_{k+1}| \leq |\angle A_mSA_{m+1}| < 180°$. Druhá nerovnosť plynie z toho, že na každej polkružnici ležia aspoň 3 z n-tice bodov. Podobne si uvedomíme, že $|A_mA_{m+1}| \geq |A_kA_{k+1}|$.

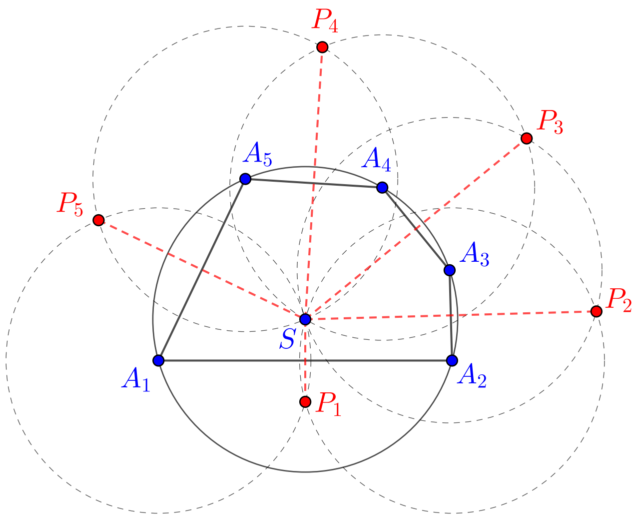
Všimnime si, že posledná nerovnosť platí práve vtedy, keď má tetiva A_mA_{m+1} najmenšiu vzdialenosť od stredu kružnice. Toto pozorovanie teraz dokážeme. Každý z trojuholníkov A_kSA_{k+1} je rovnoramenný, pretože $|SA_k| = |SA_{k+1}| = r$, kde r je polomer kružnice. Vzdialenosť tetivy A_kA_{k+1} od stredu kružnice, teda výšku tohoto trojuholníka z vrcholu S, vyjadríme v závislosti od uhla $\angle A_kSA_{k+1} = \alpha$ a polomeru kružnice: Platí

$$v = r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Keďže $\cos x$ na intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ klesá, je výška z vrcholu S v každom trojuholníku väčšia alebo rovná tej v trojuholníku A_mSA_{m+1}.



Pomocou kružníc tieto výšky porovnáme tak, že každý z trojuholníkov A_kSA_{k+1} doplníme na kosoštvorec: kružidlo zapichneme do každého z n bodov a narysujeme kružnicu so stredom v bode A_k a polomerom r. Ďalej už do tohoto bodu kružidlo zapichovať nebudeme. Priesečník kružníc so stredmi v bodoch A_k a A_{k+1} označme P_k.

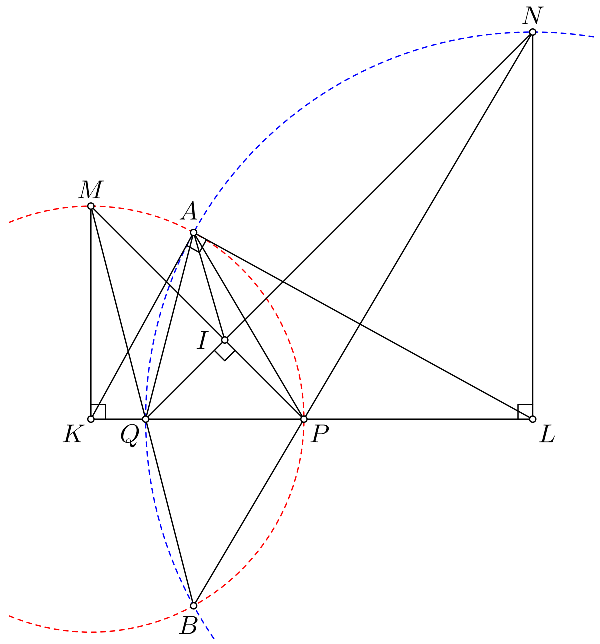


Podľa predpokladu potom platí, že $|SP_k| \geq |SP_m|$. Dĺžky týchto úsečiek už jednoducho porovnáme zostrojením kružníc so stredom v bode S a polomermi $|SP_k|$. Body A_m, A_{m+1} vymedzujú najdlhší oblúk, preto bod P_m neleží vonku žiadnej z n-tice týchto kružníc. Z toho už vyplýva, že tento oblúk naozaj vieme určiť, ako sme chceli dokázať.

Poznámky k bodování. Veľa riešiteľov sa snažilo úlohu vyriešiť tak, že kružidlo zapichnú do každého bodu na kružnici a následne spravia 2 kružnice: každá z nich prechádza najbližším vyznačeným bodom. Tým ale nie sme schopní porovnať dĺžky všetkých oblúkov. Ďalšie časté chyby boli zavedenie priesečníka, ktorý nemusel nutne existovať alebo neoverenie toho, že konštrukcia vyhovuje zadaniu: konkrétne bolo veľmi časté vytváranie priesečníkov na pôvodne zadanej kružnici, kde sa ľahko stane, že nový priesečník splynie s jedným zo zadaných bodov a v dôsledku toho sa kružidlo zapichne do tohto bodu viackrát. Správne riešenia postupovali ako vzorové riešenie alebo pomocou vytvorenia rovnostranných trojuholníkov vďaka priesečníkom a následným porovnávaním ich výšok (čo nejde úplne priamočiaro, ale dá sa modifikovať, aby fungovalo). Za konštrukciu bez zdôvodnenia správnosti sme dávali **2–4 body** podľa toho, do akej miery sa vyskytovali náznaky nejakých zdôvodnení. Za drobné chyby sme strhávali **1–2 body**.

Úloha 4. Dve kružnice k a l so stredmi postupne v bodoch K a L sa pretínajú v bodoch A a B, pričom platí $KA \perp AL$. Kružnice k a l pretínajú úsečku KL postupne v bodoch P a Q. Priamky BQ a BP druhýkrát pretínajú kružnice k a l postupne v bodoch M a N. Dokážte, že priamky PM a QN sa pretínajú v strede kružnice vpísanej trojuholníka AKL. *(Patrik Bak)*

Riešenie. Označme priesečník priamok PM a QN ako I. Vysvetlíme, že stačí dokázať, že I je stred kružnice opísanej trojuholníku APQ: Ak platí $|IA| = |IP|$, potom spolu s $|KA| = |KP|$ máme, že KI je os uhla $\angle LKA$. Analogicky by potom priamka LI bola osou uhla $\angle ALK$, čo už by stačilo.



Najprv si všimnime, že uhol $\angle QAP$ má veľkosť 45°: Ak je $|\angle LKA| = \alpha$, potom $|\angle KAP| = 90° - \alpha/2$, a teda $|\angle PAL| = \alpha/2$. Podobne, $|\angle KAQ| = \beta/2$, kde $|\angle ALK| = \beta$. Spolu tak $|\angle QAP| = 90° - \alpha/2 - \beta/2 = 45°$.

Vďaka symetrii platí, že $|\angle PBQ| = |\angle QAP| = 45°$. Z toho vyplýva, že $|\angle PKM| = 2 \cdot |\angle PBM| = 2 \cdot 45° = 90°$, a preto $|\angle KMP| = |\angle MPK| = 45°$. Analogicky, $|\angle PQI| = 45°$, a tak $|\angle QIP| = 90° = 2|\angle QAP|$. To znamená, že I je nevyhnutne stredom kružnice opísanej trojuholníku QAP: veľkosť uhla $|\angle QIP|$ sedí, $IQ = IP$, a leží v polrovine určenej priamkou QP, ktorá obsahuje bod A. Úlohu sme tak vyriešili.

Poznámka. Existuje mnoho spôsobov, ako tu pristúpiť k počítaniu uhlov. Môžeme tiež ukázať, že body M, K, Q, I, A ležia na jednej kružnici rôznymi spôsobmi.

Alternativní řešení: Z věty o obvodovém a středovém úhlu platí, že

$$|\angle MKP| = 2|\angle MBP| = 2|\angle QBN| = |\angle QLN|$$

A tedy rovnoramenné trojúhelníky MKP a QLN jsou podobné. A tedy $|\angle QPI| = |\angle QNL|$ a tedy je čtyřúhelník $ILPN$ tětivový. Znovu z obvodových úhlů máme

$$|\angle ILP| = |\angle INP| = |\angle QNB| = \frac{1}{2}|\angle QLB| = \frac{1}{2}|\angle ALQ|$$

Kde poslední rovnost plyne ze symetrie kružnic podle přímky KL.

Máme tedy, že LI je opravu osou úhlu $\angle ALK$. A analogicky dostaneme i že KI je osou $\angle AKL$ a tedy je I střed kružnice vepsané AKL.

Poznámka. je dobré si všimnout, že toto řešení nikde nevyužívá úhel $|\angle KAL| = 90°$. Opravdu úloha platí i bez tohoto předpokladu.

Poznámky k bodování. Za částečná pozorování o trojúhelnících NLQ a PKM a o úhlu QIP jsme udělovali **1–2 body**.

Úloha 5. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok T vpísaný do kružnice ω. Nech M je stredom oblúka AD kružnice ω obsahujúceho B a C. Predpokladajme, že na úsečkách BT a CT ležia postupne body $P \neq B$ a $Q \neq C$ také, že platí $|MP| = |MB|$ a $|MQ| = |MC|$. Nech O je stredom kružnice opísanej trojuholníka PQT. Dokážte, že platí $|\angle MOA| = |\angle MOD|$. *(Michal Pecho)*

Riešenie. Všimnite si, že $|MA| = |MD|$, takže na dokázanie $|\angle MOA| = |\angle MOD|$ stačí dokázať $|OA| = |OD|$. Platí

$$|\angle PBM| = |\angle DBM| = |\angle DAM| = |\angle ADM| = |\angle ACM| = |\angle QCM|.$$

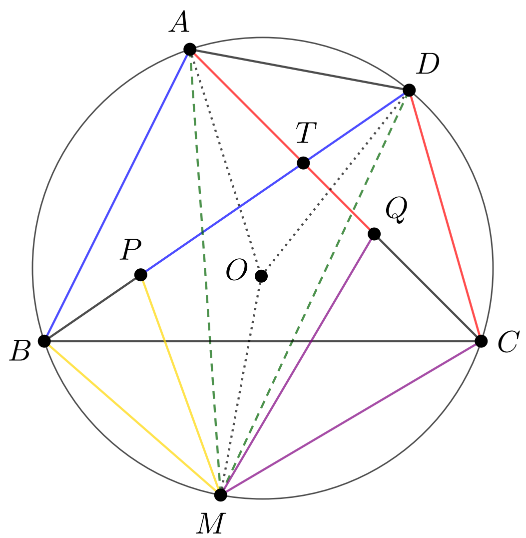
Keďže trojuholníky BMP, AMD a QMC sú rovnoramenné, sú navzájom podobné, a preto platí

$$|\angle BMP| = |\angle AMD| = |\angle QMC|.$$

Otočenie $\mathrm{R}(M, |\angle AMD|)$ zobrazuje trojuholník DPC na trojuholník ABQ, čo implikuje $|AB| = |DP|$ a $|CD| = |AQ|$. Všimnite si, že trojuholníky TCD a TBA sú podobné z vety uu, a preto

$$\frac{|DT|}{|CD|} = \frac{|AT|}{|AB|} \implies \frac{|DT|}{|AQ|} = \frac{|AT|}{|DP|} \implies |DT| \cdot |DP| = |AT| \cdot |AQ|.$$

Súčiny $|DT| \cdot |DP|$ a $|AT| \cdot |AQ|$ predstavujú postupne mocnosti bodov D a A ku kružnici opísanej TPQ. Keďže tieto mocnosti sú rovnaké, máme $|OA| = |OD|$, čo stačilo dokázať.



Alternativní řešení. Označme S střed kružnice opsané ABC. Jako v předchozím řešení ukážeme jen, že O leží na ose strany AD, tedy v našem podání, že S, O, M leží na přímce.

Označme

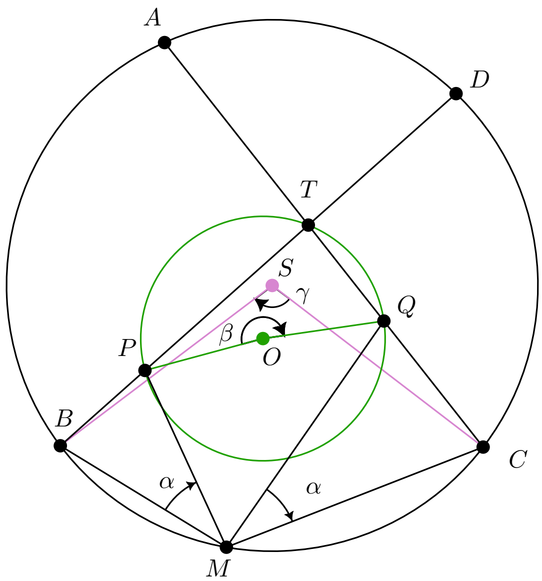
- $\alpha = |\angle BMP|$. Obdobně jako v předchozím řešení platí $\alpha = |\angle QMC|$.
- $\beta = |\angle POC|$ (na obrázku ve směru hodinových ručiček).
- $\gamma = |\angle BSC|$.

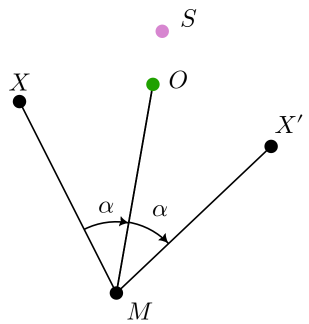
Z obvodového a středového úhlu máme $2\alpha = |\angle AOD|$.

Také z obvodových a středových úhlů platí

$$\beta = 2|\angle CTD| = 2(|\angle TAD| + |\angle ADT|) = |\angle CSD| + |\angle ASB|.$$

Zkombinováním těchto pozorování máme, že $2\alpha + \beta + \gamma = 360°$.





Označme:

- φ_M: Rotaci se středem M a úhlem α,
- φ_S: Rotaci se středem S a úhlem γ,
- φ_O: Rotaci se středem O a úhlem β.

Protože součet $2\alpha + \beta + \gamma = 360°$ dostáváme, že zobrazení φ, které vznikne jako složení

$$\varphi = \varphi_S \circ \varphi_M \circ \varphi_O \circ \varphi_M$$

musí být nějaké posunutí. A protože

$$B \overset{\varphi_M}{\mapsto} P \overset{\varphi_O}{\mapsto} Q \overset{\varphi_M}{\mapsto} C \overset{\varphi_S}{\mapsto} B,$$

je toto zobrazení identita.

Zvolme bod X takový, že $\varphi_M(X) = O$ a označme $\varphi_M(O) = X'$. Ze symetrie pak platí, že O i M leží na ose XX'.

Pak protože φ je identita a

$$X \overset{\varphi_M}{\mapsto} O \overset{\varphi_O}{\mapsto} O \overset{\varphi_M}{\mapsto} X'.$$

Musí platit, že $\varphi_S(X') = X$ a tedy S musí ležet na ose XX' a tedy S, O, M leží na přímce.

Druhé alternativní řešení: Dokážeme, že MO je kolmé na AD, což obdobně jako v předchozích řešeních je dostačující k dokázání úlohy.

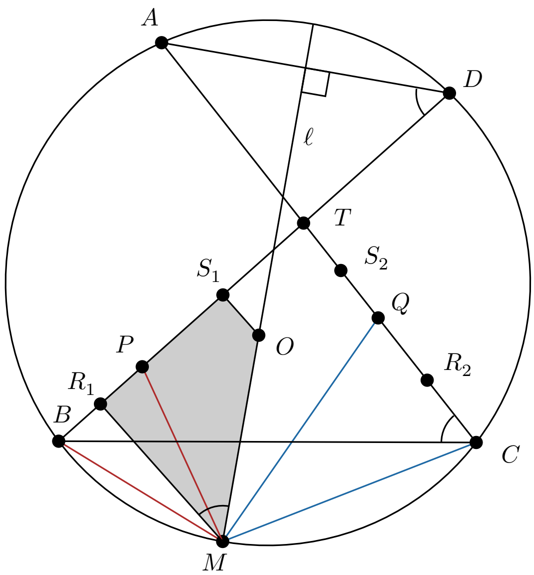
Označme ℓ kolmici na AD vedenou bodem M. Označme S_1 a R_1 postupně středy PT a BP. Všimněme si, že pak $|S_1R_1| = \frac{1}{2}|BT|$. Označme O_1 průsečík osy PT s ℓ. Všimněme si, že $S_1MO_1R_1$ je pravoúhlý lichoběžník a tedy $|MO_1| = \frac{|R_1S_1|}{\sin(\angle(R_1MO_1))}$, upraveně $2|MO_1| = \frac{BT}{\sin(\angle(R_1MO_1))}$

Z kolmostí $MO_1 \perp AD$ a $R_1M \perp BD$ máme, že $|\angle R_1MO_1| = |\angle BDA|$ a z obvodového úhlu pak $|\angle BDA| = |\angle BCT|$. Celkově tedy máme, že

$$2|MO_1| = \frac{|BT|}{\sin(\angle(BCT))}$$

Analogicky označme S_2 a R_2 postupně středy QT a CQ a dále Označme O_2 průsečík osy QT s ℓ.

Analogicky získáme vztah $2|MO_2| = \frac{|CT|}{\sin(\angle(CBT))}$. Ze sinovy věty v $\triangle BTC$ tedy máme $2|MO_1| = 2|MO_2|$ a tedy $|MO_1| = |MO_2|$, z čehož plyne, že osy stran PT a QT se opravdu protínají na ℓ, což jsme chtěli dokázat.



Poznámka: Je dobré si všimnout, že toto řešení nevyužívá nijak předpoklad, že M je střed oblouku a tedy obecně pro libovolný bod M na kružnici opsané $ABCD$ platí, že $MO \perp AD$.

Poznámky k bodování. Některá řešení říkala, že čtyřúelník $ABCD$ musí být obdélník, což ale nemusí být pravda. Za dokázání podobnosti trojúhelníků $\triangle MBP$ a $\triangle MQC$ jsme dávali 2 **body**. Za následné dokázání $|AQ| = |DC|, |DP| = |AB|$ další 2 **body**.

Úloha 6. Je daný konvexný šesťuholník $ABCDEF$, v ktorom platí $|AB| = |EF|$, $|BC| = |FA|$, $|\angle BCD| = |\angle DEF|$ a $|\angle ABC| = |\angle CDE| = |\angle EFA|$. Dokážte, že kolmica na BF vedená bodom D prechádza ortocentrom trojuholníka ACE. *(Zdeněk Pezlar)*

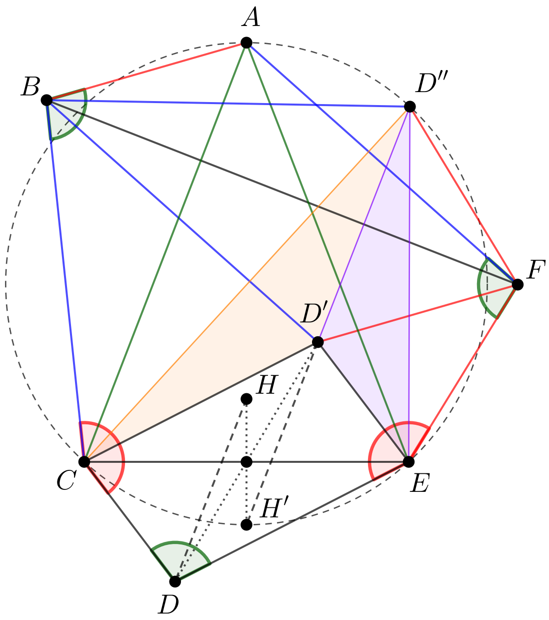
Riešenie. Zo zadaných podmienkach vyplýva, že trojuholníky BAC a FEA sú zhodné, takže $|AC| = |AE|$, čo dáva $|\angle ECA| = |\angle AEC|$. To spolu s rovnosťou $|\angle DCB| = |\angle FED|$ dáva

$$|\angle DCE| + |\angle ACB| = |\angle CED| + |\angle FEA|.$$

Trojuholníky ABC a CDE majú pri vrcholoch B a D rovnako veľké uhly, a preto

$$|\angle DCE| + |\angle CED| = |\angle ACB| + |\angle BAC|.$$

Sčítaním posledných dvoch rovností a použitím $|\angle FEA| = |\angle BAC|$ máme $|\angle DCE| = |\angle BAC|$. Tým pádom $\triangle BAC \sim \triangle DCE \sim \triangle FEA$.



V ďalšej fáze preformulujeme dokazované tvrdenie. Bod D a ortocentrum ACE označené ako H zobrazme v stredovej súmernosti podľa stredu CE. Dostaneme postupne body D' a H'. Stačí dokázať, že $H'D' \perp BF$. Pre bod H' je známe, že leží na kružnici ω opísanej ACE, to použijeme neskôr. Pre bod D' zatiaľ dokážeme $|FD'| = |FE|$ resp. $|BC| = |BD'|$. K tomu použijeme špirálnu podobnosť: zo stredovej súmernosti máme, že trojuholníky DCE a $D'CE$ sú podobné; spolu s tým, že aj DCE a FDE sú podobné, dostávame, že tiež trojuholníky $ED'C$ a EFA sú podobné a to dokonca priamo, takže zo špirálnej podobnosti aj trojuholníky $ED'F$ a ECA musia byť priamo podobné. Keďže $|AC| = |AE|$, tak nutne $|FE| = |FD'|$. Vzťah $|BC| = |BD'|$ dokážeme analogicky. Taktiež analogicky dokážeme podobnosť trojuholníkov BCD' a ACE. Spojením týchto podobností dostávame $|\angle D'FE| = |\angle CAE| = |\angle CBD'|$.

V poslednom kroku uvážme obraz D'' bodu D' v osovej súmernosti podľa BF. Dokážeme, že body H', D', D'' ležia na priamke, čím bude úloha hotová, keďže $DD'' \perp BF$. Bod H' je stredom oblúka $EH'C$ kružnice ω, stačí teda dokázať, že D'' leží na ω a $D'D''$ je osou uhla $CD''E$. Toto dokážeme nasledovne: Z osovej súmernosti a z predošlého odseku máme $|FD''| = |FD'|$ a $|FD|' = |FE|$, takže F je stredom kružnice opísanej trojuholníku $D''D'E$ a potom z vety o obvodovom a stredovom uhle máme $|\angle D'D''E| = \frac{1}{2}|\angle D'FE|$. Podobne $|\angle CD''D'| = \frac{1}{2}|\angle CBD'|$. No a keďže z konca predošlého odseku vieme, že uhly $\angle D'FE$ a $\angle CBD'$ majú veľkosť rovnú veľkosti $\angle CAE$, tak sme hotoví.

Poznámky k bodování. Úlohu nikdo nevyřešil. **1 bod** jsme dávali za využití shodnosti trojúhelníků $\triangle EFA$ a $\triangle ABC$ k ukázání rovnoramennosti $\triangle ACE$. **2 body** jsme dávali za řešení, která navíc ukázala, že $\triangle CDE$ je podobný s $\triangle EFA$ a $\triangle ABC$.