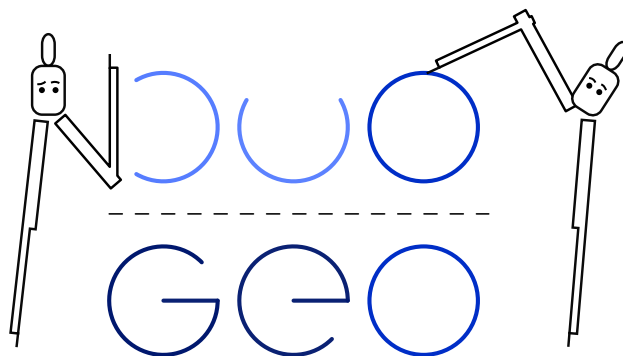


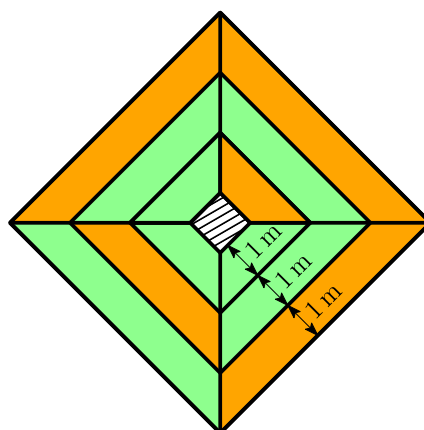


16. leden 2026

Pro získání plného počtu bodů je třeba řešení zdůvodnit, nejen vypočítat.

Úloha 1.

Máme čtvercové pódium o straně 1 metr (vyšrafovaný čtvereček uprostřed), ze které vedou do všech čtyř stran schody dolů. Každý schod je 1 metr široký. Michal a Vítek obarvili vrchní stranu každého schodu barvou. Michal použil zelenou barvu a Vítek oranžovou barvu. Na obrázku vidíte pohled shora na finální výsledek. Kdo použil více barvy?



(Mária Dományová)

Řešení

Můžeme si všimnout, že hranice schodů tvoří postupně čtverce. Největší z nich má stranu délky 7 metrů, druhý největší 5 metrů, pak 3 metry a samotné pódium má stranu délky 1 metr. Schody nejbližší k pódiu tak mají dohromady obsah $3^2 - 1^2 \text{ m}^2$, ty o jedna dále $5^2 - 3^2 \text{ m}^2$ a ty největší a nejvzdálenější $7^2 - 5^2 \text{ m}^2$. (Vždy odčítáme obsah nějakého menšího čtverce od obsahu nějakého většího čtverce.) Jednoduše tak už spočítáme obsahy jednotlivých barev:

$$S_{\text{oranžová}} = \frac{3}{4} \cdot (7^2 - 5^2) + \frac{1}{4} \cdot (5^2 - 3^2) + \frac{1}{4} \cdot (3^2 - 1^2) = 18 + 4 + 2 = 24 \text{ m}^2,$$

$$S_{\text{zelená}} = \frac{1}{4} \cdot (7^2 - 5^2) + \frac{3}{4} \cdot (5^2 - 3^2) + \frac{3}{4} \cdot (3^2 - 1^2) = 6 + 12 + 6 = 24 \text{ m}^2.$$

Vidíme tedy, že oba použili barvy stejně.

Úloha 2.

Je daný rovnostranný trojúhelník ABC . Uvnitř jeho stran vyznačíme body D , E , F a G tak, že BD je kolmá na AC , DE je kolmá na BC , EF je kolmá na BD a FG je kolmá na BC . Určete poměr $|BG| : |GE| : |EC|$.

(Marián Macko)

Řešení

Označme si S střed úsečky BC . Bod D je střed úsečky AC , protože výšky v rovnostranném trojúhelníku splývají s osami stran. Dále, jelikož je DS střední příčkou v trojúhelníku ABC , tak je i trojúhelník SCD rovnostranný. Obdobně je teď i bod E střed úsečky SC , tedy $|EC| = \frac{1}{4}|BC|$.

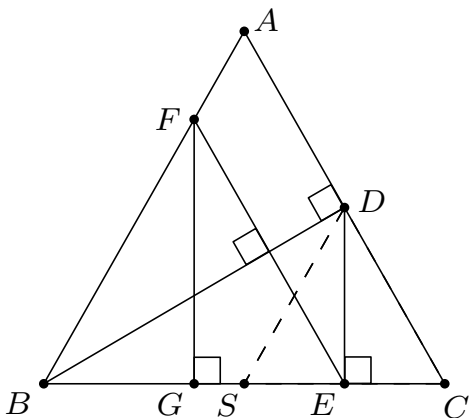
Trojúhelník BEF je také rovnoramenný, protože EF je rovnoběžné s CA (díky kolmosti EF i AC na výšku BD). Zároveň má stranu dlouhou $|BE| = \frac{3}{4}|BC|$ a G je opět střed úsečky BE . Máme tak $|BG| = |GE| = \frac{3}{8}|BC|$.

Výsledný poměr je tak

$$|BG| : |GE| : |EC| = \frac{3}{8} : \frac{3}{8} : \frac{1}{4},$$

což můžeme ještě pokrátit:

$$|BG| : |GE| : |EC| = 3 : 3 : 2.$$



Úloha 3.

Nechť $ABCD$ je lichoběžník splňující $AB \parallel CD$ a $AB \perp AD$. Předpokládejme, že existuje bod X na straně AD takový, že platí $|AX| : |XD| = 2 : 1$ a $|\angle CXD| = |\angle AXB|$. Na závěr předpokládejme, že obsah trojúhelníka BCX je roven 16 cm^2 . Vypočítejte obsah lichoběžníka $ABCD$.

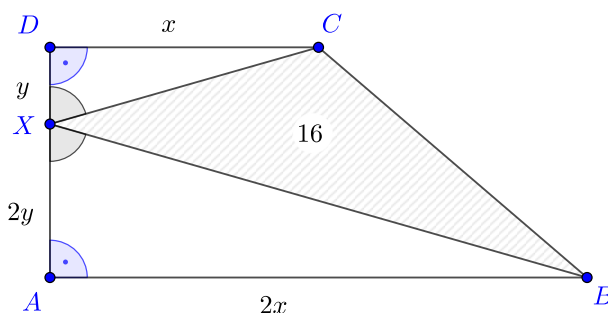
(Mária Dományová)

Řešení

Máme dáno, že $AB \parallel CD$ a $AB \perp AD$. To znamená, že strana AD je kolmá na obě základy našeho lichoběžníku, tedy $|\angle XAB| = 90^\circ$ a $|\angle XDC| = 90^\circ$. Navíc víme, že $|\angle AXB| = |\angle CXD|$, tedy trojúhelníky $\triangle AXB$ a $\triangle DXC$ jsou podobné podle věty *uu*. Díky této podobnosti máme rovnost poměrů stran:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AX|}{|XD|} = \frac{2}{1}.$$

Označením $|CD| = x$ získáváme $|AB| = 2x$. Také označme $|DX| = y$, pak $|AX| = 2y$.



Nyní spočítáme obsah lichoběžníku $ABCD$ dvěma různými způsoby. Prvně ho spočítáme jako součet obsahů trojúhelníků $\triangle AXB$, $\triangle CXD$, and $\triangle BCX$:

$$S_{\triangle AXB} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AX| = \frac{1}{2}(2x)(2y) = 2xy \text{ cm}^2,$$

$$S_{\triangle CXD} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |XD| = \frac{1}{2}(x)(y) = \frac{1}{2}xy \text{ cm}^2.$$

Využitím toho, že obsah $\triangle BCX$ je 16 cm^2 , tak celkový obsah je:

$$S_{ABCD} = 2xy + \frac{1}{2}xy + 16 = \frac{5}{2}xy + 16 \text{ cm}^2. \quad (1)$$

Obsah můžeme spočítat i standardním vzorcem pro výpočet obsahu lichoběžníku:

$$S_{ABCD} = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |AD| = \frac{2x + x}{2} \cdot 3y = \frac{3x}{2} \cdot 3y = \frac{9}{2}xy \text{ cm}^2 \quad (2)$$

Porovnáním výrazů v (1) a (2) získáváme:

$$\frac{9}{2}xy = \frac{5}{2}xy + 16.$$

Odečtením $\frac{5}{2}xy$ od obou stran máme:

$$2xy = 16 \implies xy = 8.$$

Nakonec dosazením zpět do vztahu (2) pro obsah lichoběžníka máme žádaný výsledek:

$$S_{ABCD} = \frac{9}{2} \cdot 8 \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2.$$

Úloha 4.

Je daný různonostranný ostroúhlý trojúhelník ABC . Označme D a E po řadě paty výšek z A na BC a z B na AC . Uvažme body X, Y takové, že $DXEY$ je kosočtverec a X leží na úsečce AB . Předpokládejme, že C leží uvnitř čtyřúhelníka $DXEY$ a že platí $|\angle CAY| = |\angle AYE|$. Určete velikost úhlu $\angle ABE$.

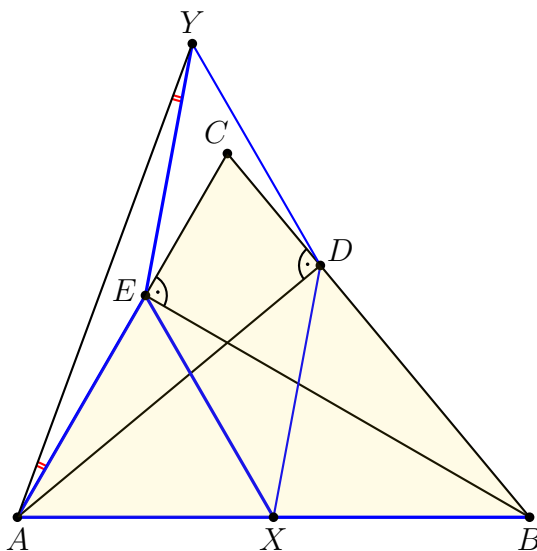
(Patrik Vrba)

Řešení

Z rovnosti $|\angle CAY| = |\angle AYE|$ víme, že AEY je rovnoramenný trojúhelník, neboli $|EA| = |EY|$. Také protože $DXEY$ je kosočtverec, tak platí $|EA| = |EX|$.

Jelikož D a E jsou paty výšek, tak $|\angle ADB| = |\angle AEB| = 90^\circ$. Z Thaletovy věty tedy body D a E leží na kružnici nad průměrem AB . Označme střed této kružnice O . Víme, že O leží na AB a zároveň $|OD| = |OE|$, takže $O \equiv X$. Z toho plyne rovnost délek $|AX| = |BX| = |DX| = |EX|$, tudíž AXE je rovnostranný trojúhelník a BDX a BXE jsou rovnoramenné trojúhelníky.

Dále spočítáme nějaké úhly. Už víme, že AXE je rovnostranný, tedy $|\angle AXE| = 60^\circ$ a z vedlejších úhlů tak $|\angle BXE| = 120^\circ$. Jelikož BXE je rovnoramenný, tak konečně máme $|\angle XBE| = |\angle ABE| = 30^\circ$, jak jsme chtěli.



Úloha 5.

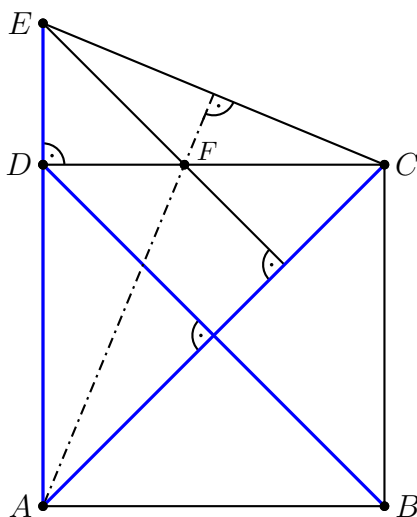
Mějme čtverec $ABCD$. Na přímce AD leží bod E tak, že $|AE| = |BD|$ a D leží mezi body A a E . Osa úsečky CE protne přímku CD v bodě F . Dokažte, že přímka EF je rovnoběžná s úhlopříčkou BD . Platí toto tvrzení i když bod A leží mezi body D a E ?

(Marián Macko)

Řešení

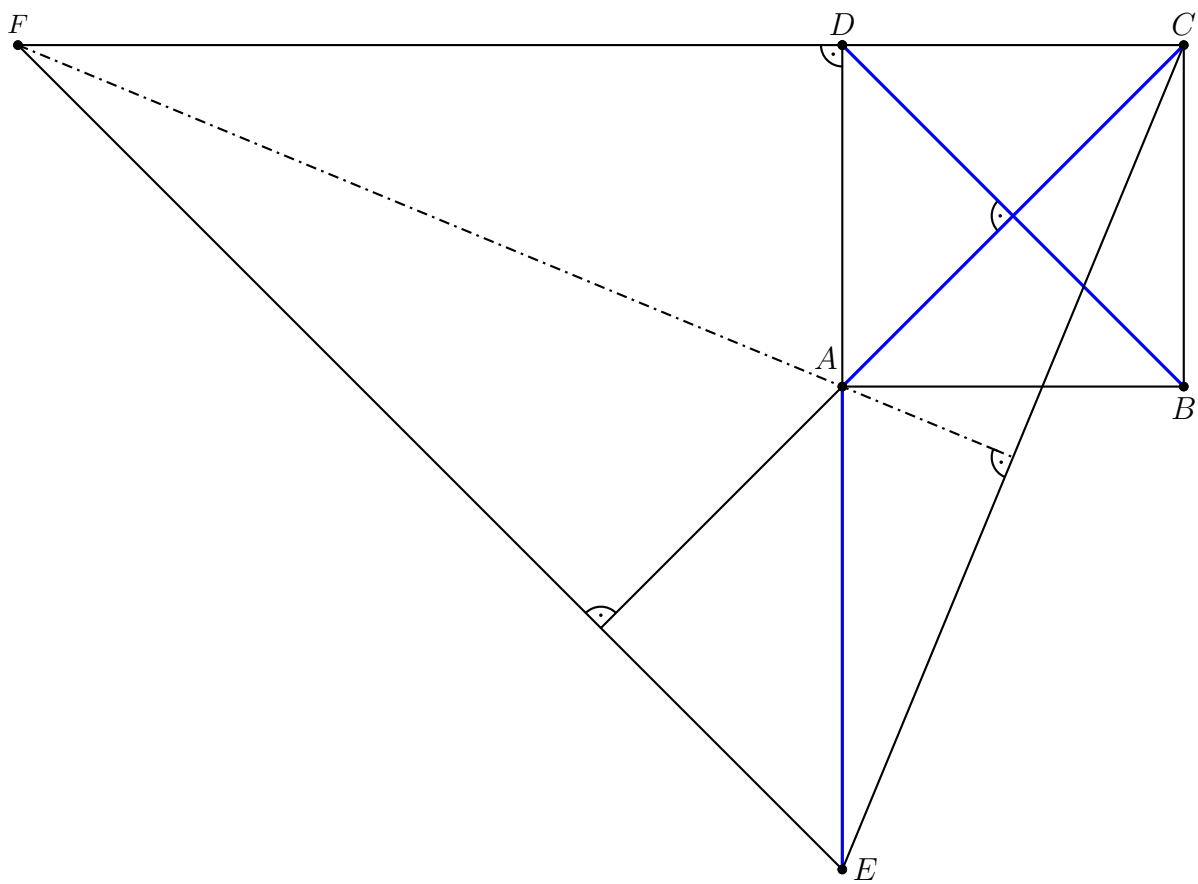
Ukážeme, že přímka i úhlopříčka jsou kolmé na přímku AC . Nejprve vyřešíme případ, když D leží mezi body A a E . Protože BD a AC jsou úhlopříčky čtverce, jsou stejně dlouhé. Z toho plyne, že CAE je rovnoramenný trojúhelník.

V rovnoramenném trojúhelníku splývá výška na základnu a její osa. Zde osa úsečky CE splývá s výškou z vrcholu A v trojúhelníku ACE , tedy $AF \perp CE$. Jelikož $ABCD$ je čtverec, máme $CD \perp AD$ a CF je tak výškou v trojúhelníku ACE z vrcholu C . Tím pádem je bod F ortocentrum trojúhelníku ACE (leží na průsečíku výšek). Z toho ale získáme, že i EF výškou tohoto trojúhelníku a tak $EF \perp AC$. A také protože úhlopříčky čtverce jsou na sebe kolmé, tak $BD \perp AC$, a tedy $BD \parallel EF$.



Nyní se podíváme na případ, když A leží mezi D a E . Opět získáme, že $|AC| = |AE|$ a že trojúhelník ACE je rovnoramenný.

Z toho, že ACE je rovnoramenný, můžeme opět odvodit, že CE je výška z vrcholu A a CF je výška z vrcholu C v trojúhelníku ACE . Opět je tak F ortocentrum trojúhelníku ACE . Z toho je zase EF výškou a tak $EF \perp AC$ a tedy $EF \parallel BD$ díky kolmosti úhlopříček čtverce.



Úloha 6.

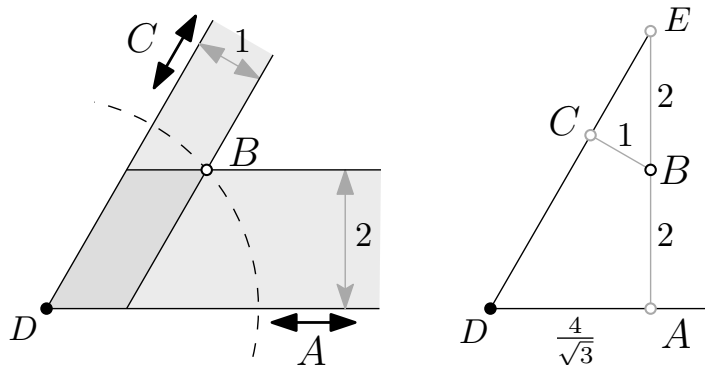
Nechť $ABCD$ je konvexní¹ čtyřúhelník, v němž platí $|AB| = 2$, $|BC| = 1$ a $\angle CDA = 60^\circ$. Najděte největší možnou délku úhlopříčky BD a dokažte, že nemůže být delší.

(Josef Tkadlec)

Řešení

Trik je v tom, začít si kreslit obrázek od správných bodů. Začneme s bodem D a nakresleme polopřímky DA (směrem doprava) a DC (směrem šikmo nahoru) svírající úhel $\angle 60^\circ$. Kde může ležet bod B ? Díky konvexitě a podmínce $|AB| = 2$, může být pouze ve vodorovném páse výšky 2 “nad” polopřímkou DA . Podobně díky $|BC| = 1$, musí B ležet v pásu šířky 1 “napravo” od polopřímky DC . Musí tak ležet v průniku těchto pásů, což je rovnoběžník. Nejvzdálenější bod od D je zjevně protilehlý vrchol tohoto rovnoběžníku. Body A, C jsou pak paty kolmic z B na příslušné polopřímky. Takto tedy bude vypadat čtyřúhelník $ABCD$, pro který úhlopříčka BD má největší možnou délku.

V tomto čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhly při A a C pravé. Dopočet délky BD je už standardní počítání s “polovinami” rovnostranných trojúhelníků. Například označme $E = AB \cap CD$. Díky $\angle CBE = 60^\circ$ a $CE \perp BC$ je $|BE| = 2 \cdot |BC| = 2$. Tedy $|AD| = \frac{1}{\sqrt{3}}|AE| = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku DAB máme $|DB|^2 = \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3}$, a tedy $|DB| = \frac{2}{3}\sqrt{21}$.



¹Mnohoúhelník nazýváme konvexní, pokud jsou všechny jeho vnitřní úhly menší než 180° .