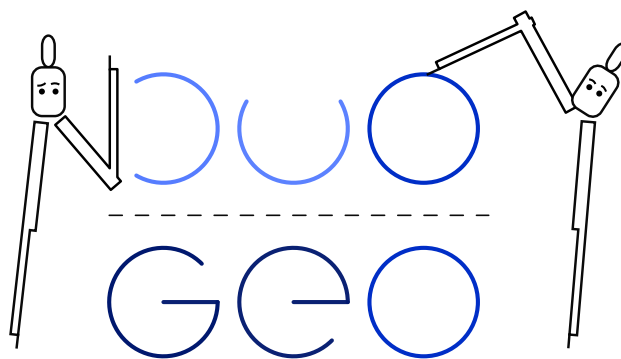
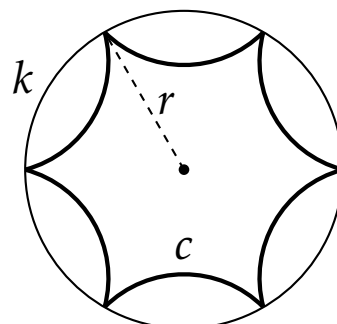




23. leden 2026

Úloha 1.

Do kružnice k s poloměrem r je jako na obrázku nakreslená křivka c , která vznikla sjednocením šesti shodných čtvrtkružnic. V závislosti na r vyjádřete délku této křivky.



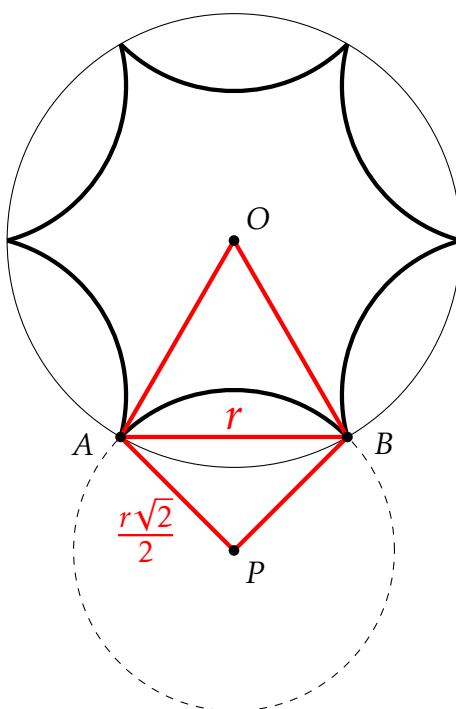
(Karel Pazourek)

Řešení

Nechť O je střed kružnice k a A a B jsou dva sousední body, které leží na c i k . Všimněme si, že platí $|OA| = |OB| = r$ a $|\angle AOB| = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$, takže trojúhelník AOB je rovnostranný, a tudíž $|AB| = r$.

Nechť P je střed kružnice, které přísluší oblouk AB křivky c . Tento oblouk je čtvrtkruh, takže $|\angle APB| = \frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$, a tedy $|PA| = |PB| = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Nyní můžeme spočítat délku křivky c :

$$\text{délka } (c) = 6 \cdot \text{délka (oblouku } AB) = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi r.$$



Úloha 2.

Mějme trojúhelník ABC , ve kterém platí $|AB| = |AC|$. Označme M střed strany BC . Dále nechť N je bod takový, že $AM \parallel CN$ a $|AN| = |MN|$. Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a ANC .

(Marián Macko)

Řešení

Označme P střed úsečky AM . Trojúhelník AMN je rovnoramenný se základnou AM . Proto N leží na ose úsečky AM , což je přímka PN . Proto platí $AM \perp PN$.

Trojúhelník ABC je též rovnoramenný, a proto platí $AM \perp BC$, jelikož AM je osa úsečky BC . Dále máme, že $CN \parallel AM$. Z toho již vyplývá, že $PMCN$ je obdélník. Máme tak

$$|NC| = |PM| = \frac{1}{2}|AM|.$$

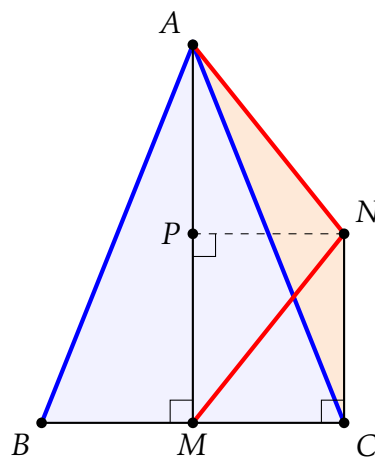
Nyní se pokusíme vyjádřit obsahy obou trojúhelníků pomocí délek úseček AM a BC . Nejprve vidíme, že obsah trojúhelníku ANC můžeme spočítat následovně:

$$S_{ANC} = S_{AMCN} - S_{AMC}.$$

Dále vyjádříme obsah trojúhelníku AMC následovně:

$$S_{AMC} = \frac{1}{2}|AM| \cdot |CM| = \frac{1}{2}|AM| \cdot \frac{|BC|}{2} = \frac{1}{4}|AM| \cdot |BC|.$$

Čtyřúhelník $AMCN$ je lichoběžník, tedy můžeme spočítat jeho obsah pomocí délek jeho základů a jejich vzdálenosti.



Snadno pak máme

$$S_{AMCN} = \frac{1}{2}(|AM| + |NC|) \cdot |MC| = \frac{1}{2}(|AM| + \frac{1}{2}|AM|) \cdot \frac{|BC|}{2} = \frac{3}{8}|AM| \cdot |BC|,$$

a tedy

$$S_{ANC} = S_{AMCN} - S_{AMC} = \frac{3}{8}|AM| \cdot |BC| - \frac{1}{4}|AM| \cdot |BC| = \frac{1}{8}|AM| \cdot |BC|.$$

Konečně $S_{ABC} = \frac{1}{2}|AM| \cdot |BC|$, z čehož jsme hotovi:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ANC}} = \frac{\frac{1}{2}|AM| \cdot |BC|}{\frac{1}{8}|AM| \cdot |BC|} = 4.$$

Úloha 3.

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Označme P a Q po řadě střed oblouku AC neobsahujícího B a střed oblouku AB neobsahujícího C kružnice opsané trojúhelníku ABC . Buďte R a S body po řadě na přímkách AP a AQ tak, že $AC \perp CR$ a $AB \perp BS$. Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na přímce RS .

(Patrik Bak)

Řešení

Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Ukážeme, že I je pata kolmice z A na RS , t.j. že úhly $\angle AIS$ a $\angle AIR$ jsou pravé.

Nejprve ukážeme, že čtyřúhelníky $AIBS$ a $AICR$ jsou tětíkové. Označme α, β, γ příslušné úhly v trojúhelníku ABC .

Protože Q je střed oblouku AB , tak $|QA| = |QB|$. Proto platí

$$|\angle SAB| = |\angle QAB| = \frac{180^\circ - |\angle AQB|}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - |\angle BCA|)}{2} = \gamma/2.$$

Můžeme pak spočítat $|\angle ASB| = 90^\circ - |\angle SAB| = 90^\circ - \gamma/2$.

Nyní uvažme trojúhelník AIB . Úhly $\angle BAI$ a $\angle ABI$ mají velikosti po řadě $\alpha/2$ a $\beta/2$, tedy

$$|\angle AIB| = 180^\circ - \alpha/2 - \beta/2 = 180^\circ + \gamma/2 - (\alpha + \beta + \gamma)/2 = 180^\circ + \gamma/2 - 180^\circ/2 = 90^\circ + \gamma/2.$$

Zjevně bod S leží vně trojúhelníku ABC a I leží uvnitř, tedy I a S leží na opačných stranách přímky AB . Jelikož

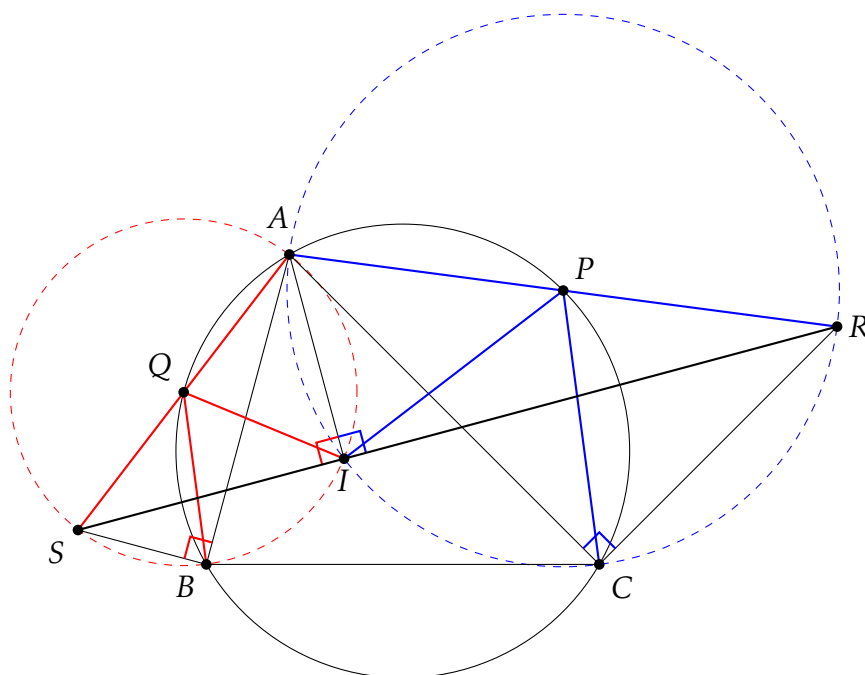
$$|\angle ASB| + |\angle AIB| = (90^\circ - \gamma/2) + (90^\circ + \gamma/2) = 180^\circ,$$

tak body A, I, B a S leží na kružnici. Podobně body A, I, C a R leží na kružnici.

Konečně, protože $|\angle ABS| = 90^\circ$ a $|\angle ACR| = 90^\circ$, tak jsou úsečky AS a AR průměry těchto dvou kružnic, tedy

$$|\angle AIS| + |\angle AIR| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

což znamená, že body R, I a S leží na jedné přímce.



Poznámka. Je známo, že body A, I, B leží na kružnici se středem Q . To je velmi užitečná vlastnost, která se často v úlohách hodí. Díky tomuto faktu hned plyne, že S též na této kružnici leží, jelikož AS je její průměr.

Úloha 4.

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ takový, že uvnitř něj existuje bod P splňující $|AP| = |AB|$, $|DP| = |DC|$, $|\angle PBA| = 2|\angle PAD|$ a $|\angle PCD| = 2|\angle PDA|$. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku PBC a dále M střed úsečky OP . Dokažte, že $|MA| = |MD|$.

(Michal Pecho)

Řešení

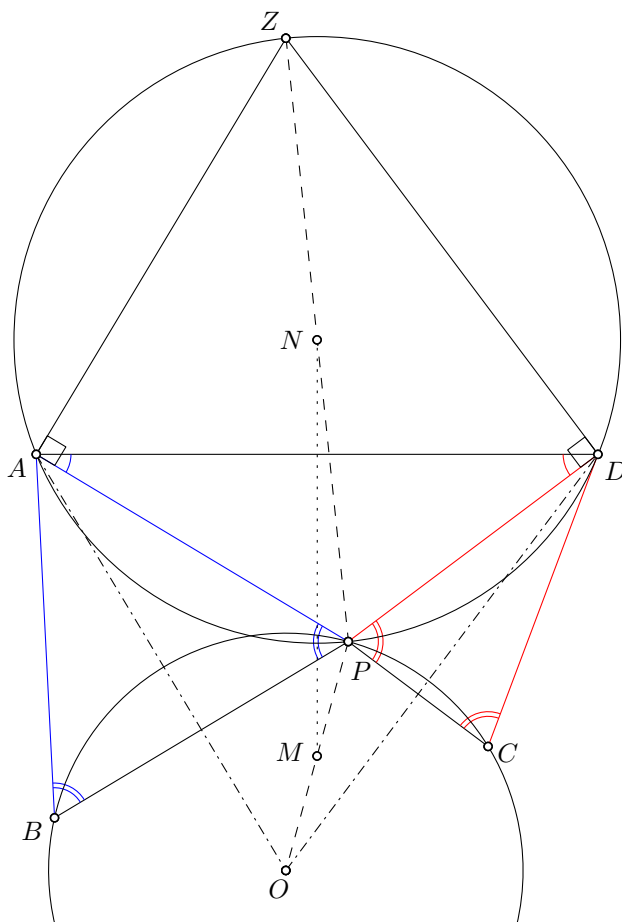
Body A a O leží na ose úsečky BP a body D a O leží na ose úsečky CP . Rychlé úhlení nám dá:

$$\begin{aligned} |\angle OAD| &= |\angle OAP| + |\angle PAD| \\ &= 90^\circ - |\angle BPA| + |\angle PAD| \\ &= 90^\circ - |\angle PBA| + |\angle PAD| \\ &= 90^\circ - 2 \cdot |\angle PAD| + |\angle PAD| \\ &= 90^\circ - |\angle PAD|. \end{aligned}$$

Analogicky získáme $|\angle ODA| = 90^\circ - |\angle PDA|$. Označme Z obraz O v osové souměrnosti podle AD , zjevně pak $OZ \perp AD$. Ze symetrie máme $|\angle ZAD| = |\angle OAD|$ a $|\angle ZDA| = |\angle ODA|$. Proto platí

$$\begin{aligned} |\angle ZAP| &= |\angle ZAD| + |\angle PAD| = 90^\circ - |\angle PAD| + |\angle PAD| = 90^\circ, \\ |\angle ZDP| &= |\angle ZDA| + |\angle PDA| = 90^\circ - |\angle PDA| + |\angle PDA| = 90^\circ, \end{aligned}$$

což znamená, že Z leží na kružnici opsané trojúhelníku PDA a PZ je její průměr. Proto střed N úsečky PZ leží na ose úsečky AD . Jelikož $MN \parallel OZ$ (MN je střední příčka trojúhelníku $\triangle OPZ$) a $OZ \perp AD$, získáme $MN \perp AD$. Proto přímka MN je osa úsečky AD , tedy $|MA| = |MD|$.



Řešení II

Označme P' a P'' po řadě obrazy P v osové souměrnosti podle přímky AD a ve středové souměrnosti podle středu úsečky AD . Ze zadaných úhlových podmínek máme

$$|\angle P'DP| = 2 \cdot |\angle ADP| = |\angle DCP| = |\angle DPC|,$$

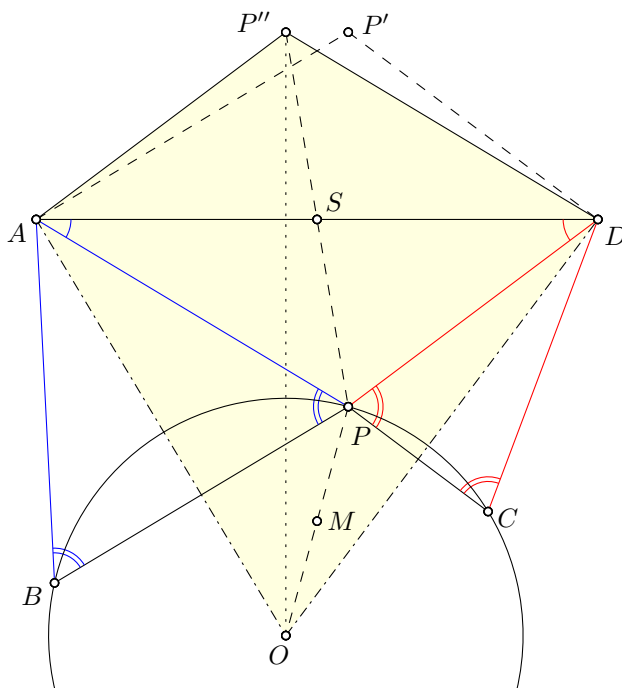
takže $P'D \parallel PC$. Jelikož přímka DO je osa úsečky CP , taktéž platí $DO \perp PC$. Proto dokonce platí $P'D \perp DO$. Analogicky platí $P'A \perp AO$.

Označme konečně S střed úsečky AD . Jelikož S je též střed úsečky PP'' , tak úsečka SM je střední příčka v trojúhelníku OPP'' , což znamená $SM \parallel P''O$. Abychom tedy ukázali, že M leží na ose úsečky AD (která prochází bodem S), stačí nám dokázat, že platí $P''O \perp AD$.

Použijeme nyní známý fakt, že úhlopříčky čtyřúhelníka $P''AOD$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když mají protilehlé strany stejné součty čtverců délek: $|P''D|^2 + |AO|^2 = |P''A|^2 + |DO|^2$. Ze symetrie máme

$$|P''D|^2 + |AO|^2 = |P'A|^2 + |AO|^2 = |P'O|^2 = |P'D|^2 + |DO|^2 = |P''A|^2 + |DO|^2,$$

což znamená $P''O \perp AD$, čímž je důkaz ukončen.



Úloha 5.

Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník takový, že existuje bod E na straně AB splňující $|\angle ADE| = |\angle DEA| = |\angle DCE|$ a $|\angle ECB| = |\angle BEC| = |\angle EDC|$. Dokažte, že jedna ze společných tečen kružnic vepsaných trojúhelníkům AED a BEC je rovnoběžná s přímkou CD .

(Patrik Bak)

Řešení

Buďte I a J po řadě středy kružnic vepsaných trojúhelníkům AED a BEC . Všimněme si, že

$$|\angle EID| = 180^\circ - |\angle IDE| - |\angle DEI| = 180^\circ - |\angle DEA| = 180^\circ - |\angle DCE|,$$

tedy body C, D, E, I leží na kružnici. Analogicky body C, D, E, J leží na kružnici. Dokonce tedy všech pět bodů C, D, E, I, J leží na jedné kružnici.

Jedna ze společných tečen našich dvou kružnic je přímka AB – tedy ta druhá je obraz přímky AB v osově souměrnosti podle přímky IJ . Označme P, Q průsečíky obrazu AB v této souměrnosti po řadě s přímkami ED a EC . Ukážeme, že PQ a CD jsou rovnoběžné, tak, že ukážeme $|\angle EPQ| = |\angle EDC|$.

Označme R, S průsečíky přímky IJ po řadě s přímkami ED a EC . Spočítáme:

$$|\angle ERS| = |\angle RIE| + |\angle REI| = |\angle JIE| + |\angle DEI| = |\angle ECJ| + |\angle EDI| =$$

$$|\angle CEJ| + |\angle EJI| = |\angle SEJ| + |\angle SJE| = |\angle RSE|.$$

Jelikož PQ je obraz přímky AB v souměrnosti podle IJ , tak všechny tři přímky buď prochází jedním bodem, a nebo jsou všechny navzájem rovnoběžné.

- a) Nejprve se podíváme na případ, kdy přímky PQ, AB a IJ jsou navzájem rovnoběžné. Pak rychlé úhlení dá

$$|\angle EPQ| = |\angle ERS| = |\angle ESR| = |\angle BES| = |\angle BEC| = |\angle EDC|,$$

tedy přímky PQ a CD jsou rovnoběžné.

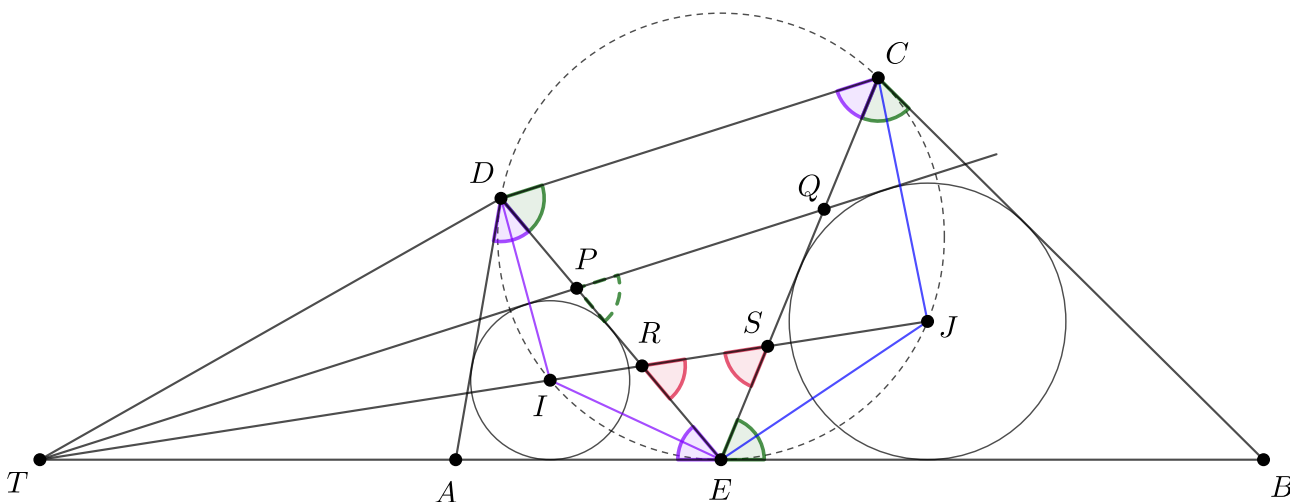
- b) Dejme tedy tomu, že se přímky PQ, AB a IJ protínají v bodě T . Poté vyúhlíme

$$|\angle EPQ| = |\angle ETP| + |\angle PET| = 2 \cdot |\angle ETR| + |\angle RET| = |\angle ETR| + (|\angle ETR| + |\angle RET|) =$$

$$|\angle ETR| + |\angle ERS| = |\angle ETS| + |\angle EST| = |\angle BEC| = |\angle EDC|.$$

Tedy jsou PQ a CD též rovnoběžné.

Ve všech případech jsou PQ a CD rovnoběžné, jak jsme chtěli.



Úloha 6.

V ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a M střed oblouku BC obsahujícího bod A kružnice opsané trojúhelníku ABC . Body K a L leží po řadě na úsečkách BM a CM tak, že přímka AK je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AIC a přímka AL je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AIB . Dokažte, že body K, L a I leží na jedné přímce.

(Patrik Bak)

Řešení

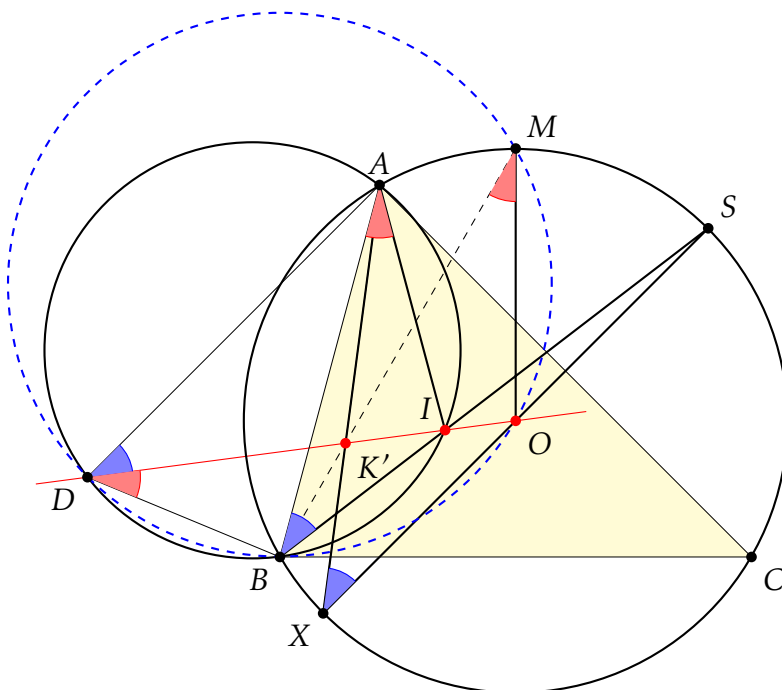
Buď O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a K' průsečík přímky IO s tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku AIC v bodě A . Dokážeme, že K' leží na přímce BM . Z toho pak plyne $K' \equiv K$ a následně i, že K, I a O leží na jedné přímce. Analogicky pak leží i L, I a O na přímce, čímž budeme hotovi.

Nechť D je druhý průsečík přímky OI a kružnice opsané trojúhelníku AIB . Jednoduchými počty s úhly získáváme

$$|\sphericalangle BDO| = |\sphericalangle BDI| = |\sphericalangle BAI| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BMO|,$$

kde jsme využili, že O leží na ose úhlu $\sphericalangle BMC$. Protože $|\sphericalangle BDO| = |\sphericalangle BMO|$, tak body B, D, M a O leží na jedné kružnici.

Nechť X je druhý průsečík tečny ke kružnici opsané trojúhelníku AIC v bodě A a kružnice opsané trojúhelníku ABC . Dále nechť S je střed kružnice opsané trojúhelníku AIC . Je známo, že S je střed oblouku AC neobsahující bod B kružnice opsané trojúhelníku ABC . Jelikož XA je tečnou ke kružnici AIC , tak $AS \perp AX$, a tudíž X, O a S leží na jedné přímce.



Přenášením úhlů získáváme

$$|\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle ADI| = |\sphericalangle ABI| = |\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle AXS| = |\sphericalangle AXO|,$$

čili A, D, X a O leží na jedné kružnici.

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . Dokážeme, že body K, O, I leží na přímce. Opět se analogicky dokáže, že i L, O, I leží na přímce, čímž budeme hotovi.

Óznaĉme střed kruŹnice opsané trojúhelníku AIC jako S . Je známé, Źe S je střed oblouku AC neobahující bod B a leŹí na pŹímce BI . Nechť X je druhý pŹíseĉík pŹímky AK s kruŹnicí opsanou trojúhelníku ABC . JelikoŹ XA je teĉnou ke kruŹnici AIC , tak je $AS \perp AX$, a tedy X, O, S leŹí na jedné pŹímce.