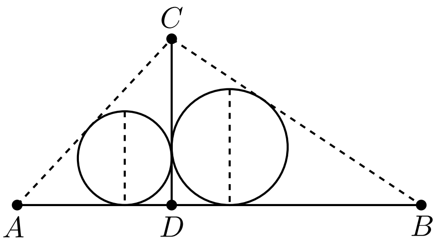
1. ročník soutěže dvojic DuoGeo – kategorie SŠ

16. 2. 2025

Úloha 1. Je dán trojúhelník ABC s výškou CD, přičemž bod D leží na úsečce AB. Součet délek stran AC, BC a průměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům ADC a BDC (tedy součet čárkovaných úseček) je 26. Délka úsečky CD je 6. Určete obsah trojúhelníku ABC. *(Mária Dományová, Patrik Bak)*



Úloha 2. Mějme pětiúhelník $ABCDE$ s právě jedním nekonvexním úhlem, který je při vrcholu C. Předpokládejme, že polopřímka AC protíná stranu DE a tím rozděluje pětiúhelník na 3 shodné trojúhelníky. Dokažte, že poměr délek některých dvou stran pětiúhelníku $ABCDE$ je roven $3 : 2$. *(Josef Tkadlec)*

Úloha 3. Na kružnici se zvýrazněným středem je zvýrazněných $n \geq 3$ různých bodů. Ty rozdělují kružnici na oblouky $o_1, \ldots, o_n$ o různých délkách, kratších než je délka polokružnice. *Kružnicové operace* umožňují:

(i) zvýraznit průsečíky dvou kružnic,
(ii) sestrojit kružnici se středem v některém ze zvýrazněných bodů, přičemž kružítko můžeme do každého bodu zapíchnout maximálně jednou (jakmile je v něm zapíchnuté, můžeme sestrojit více kružnic),
(iii) určit polohu zvýrazněného bodu vzhledem k některé z nakreslených kružnic (tedy jestli leží na kružnici, vevnitř, nebo vně).

Dokažte, že pomocí těchto operací umíme zjistit, který z oblouků $o_1, \ldots, o_n$ je nejdelší. *(Ema Čudaiová)*

Úloha 4. Kružnice k a l se středy postupně v bodech K a L se protínají v bodech A a B, přičemž platí $KA \perp AL$. Kružnice k a l protínají úsečku KL postupně v bodech P a Q. Přímky BQ a BP podruhé protínají kružnice k a l postupně v bodech M a N. Dokažte, že přímky PM a QN se protínají ve středu kružnice vepsané trojúhelníku AKL. *(Patrik Bak)*

Úloha 5. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jehož průsečík úhlopříček označíme T, vepsaný do kružnice ω. Nechť M je střed oblouku AD kružnice ω, který obsahuje body B a C. Předpokládejme, že na úsečkách BT a CT leží postupně body $P \neq B$ a $Q \neq C$ takové, že platí $|MP| = |MB|$ a $|MQ| = |MC|$. Dále nechť O je středem kružnice opsané trojúhelníku PQT. Dokažte, že platí $|\angle MOA| = |\angle MOD|$. *(Michal Pecho)*

Úloha 6. Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, ve kterém platí $|AB| = |EF|$, $|BC| = |FA|$, $|\angle BCD| = |\angle DEF|$ a $|\angle ABC| = |\angle CDE| = |\angle EFA|$. Dokažte, že kolmice na BF vedená bodem D prochází ortocentrem trojúhelníku ACE. *(Zdeněk Pezlar)*